Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych cz. I

Ryszard Myhan

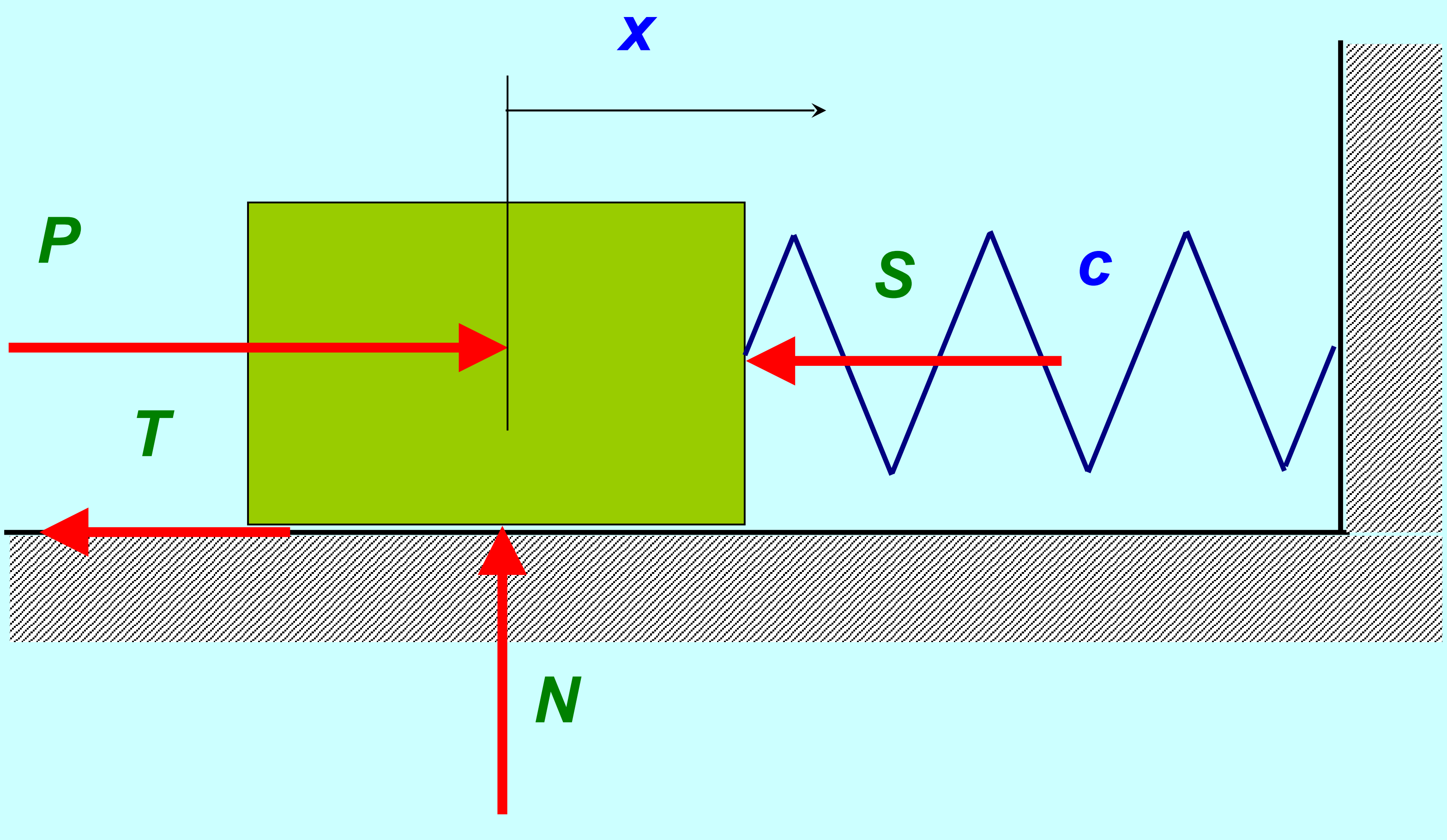
Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia suchego

- Suwaka porusza się w poziomych prowadnicach, gdzie ***x=x(t)*** oznacza przesunięcie suwaka względem nieruchomej prowadnicy w kierunku zgodnym z kierunkiem siły wymuszającej ***P***
- Suwak jest połączony do obudowy za pośrednictwem ściskanej sprężyny (nieważkiej i bez histerezy) o sztywności ***c***, która oddziaływuje na suwak z siłą ***S(x)***
- Ponadto założono, że współczynnik tarcia suchego μ ma inną wartość w spoczynku i inną w ruchu.
- W rozważanym przypadku nie uwzględnia się tarcia lepkiego

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia suchego



Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia suchego

- Analizie poddano dwa stany:
  - stan „a” poślizgu - gdy $\dot{x} > 0$
  - stan „b” brak poślizgu - gdy $\dot{x} = 0$
- Równanie ruchu dla tego przypadku można zapisać w postaci:

$$m \cdot \ddot{x} + T_s = P_{zew}$$

gdzie:

P_{zew} - jest sumą wszystkich sił zewnętrznych;

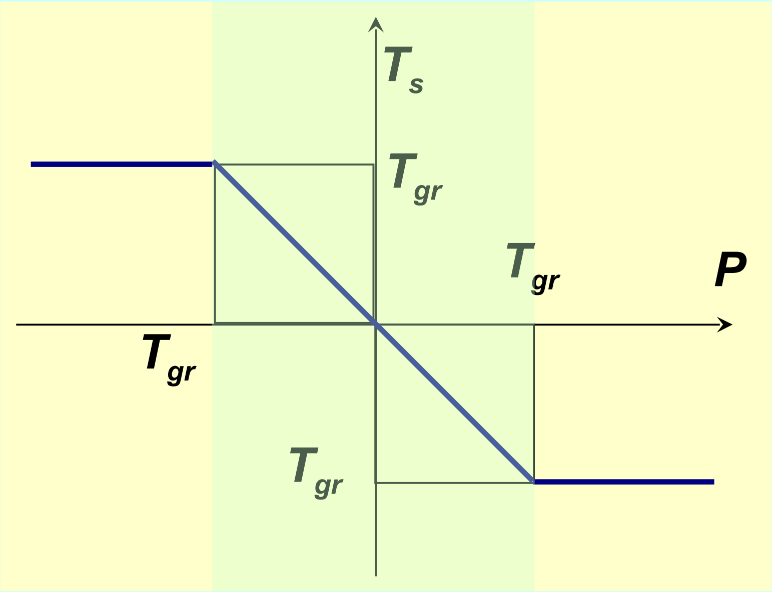
T_s - siłą tarcia suchego;

m - masą ciała.

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia suchego

- Przebieg siły tarcia suchego T_s w funkcji zewnętrznej siły wymuszającej P:



co oznacza, że:

- w stanie „a” wartość siły tarcia $T_s = T_{gr}$
- w stanie „b” wartość siły tarcia $T_s = P$

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia suchego

- Dla stanu „a” równanie ruchu przyjmie postać:

$$\ddot{x} = \frac{P_{zew} - T_{gr} \cdot sign(\dot{x})}{m}$$

- Aby zamodelować stan „b”, wprowadzono dodatkową funkcję ***Proj***, zwaną funkcją projekcji

$$\mathrm{Proj}(z) = \begin{cases} z, & \text{gdy } |z| < 1 \\ \mathrm{sign}(z), & \text{gdy inaczej} \end{cases}$$

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia suchego

- Siła tarcia w stanie „b” wyrazi się więc zależnością:

$$T_{sp} = t \cdot T_{gr} \qquad gdzie \quad t \in [-1; +1]$$

- Wartość współczynnika ***t*** to wartość funkcji projekcji

$$t = \mathrm{Pr}\,oj\left(\frac{P_{zew}}{T_{gr}}\right)$$

- Równanie ruchu w stanie „b” ostatecznie przyjmie więc postać:

$$\ddot{x} = \frac{P_{zew} - t \cdot T_{gr}}{m} = \frac{1}{m}\left(P_{zew} - T_{gr} \cdot \mathrm{Pr}\,oj\left(\frac{P_{zew}}{T_{gr}}\right)\right)$$

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia suchego

- Do wyznaczenia granicznej wartości siły tarcia $\boldsymbol{T_{gr}}$, zastosowano najprostszy, powszechnie znany model Newtona:

$$T_{gr} = | N | \cdot \mu$$

  gdzie: N – siła nacisku;

  μ - współczynnik tarcia suchego.

- Siła zewnętrzna $\boldsymbol{P_{zew}}$, to suma wektorowa siły wymuszającej ***P*** i siły oddzaływania sprężyny ***S***:

$$P_{zew} = -c \cdot x + P$$

  gdzie:

  - c – stała sprężyny;
  - x – przemieszczenie .

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia suchego

```
global c m k P mi
c=1;      m=1;     k=1;      P=0;
mi=input('Współczynnik tarcia ? ');
w=input('Wychylenie początkowe ? ');
p=input('Prędkość początkowa   ? ');
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4 );
hold on
[T,Y] = ode45(@tar_such,[0 6],[w p],options);
plot(T,Y(:,1),'b',T,Y(:,2),'r')
grid
xlabel('czas [s]')
ylabel('Wychylenie  [m], Predkosc [m/s]')
```

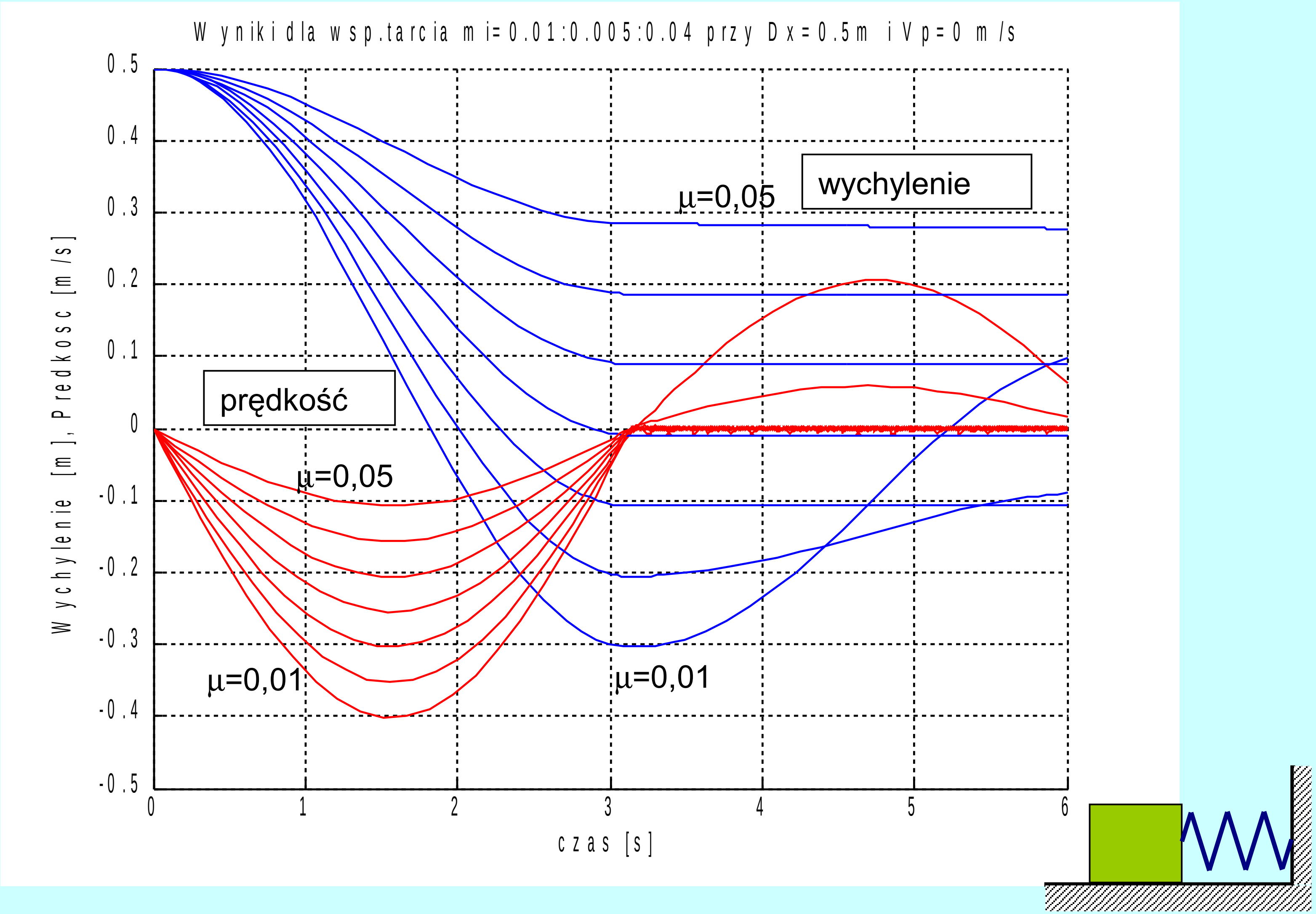
Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia suchego

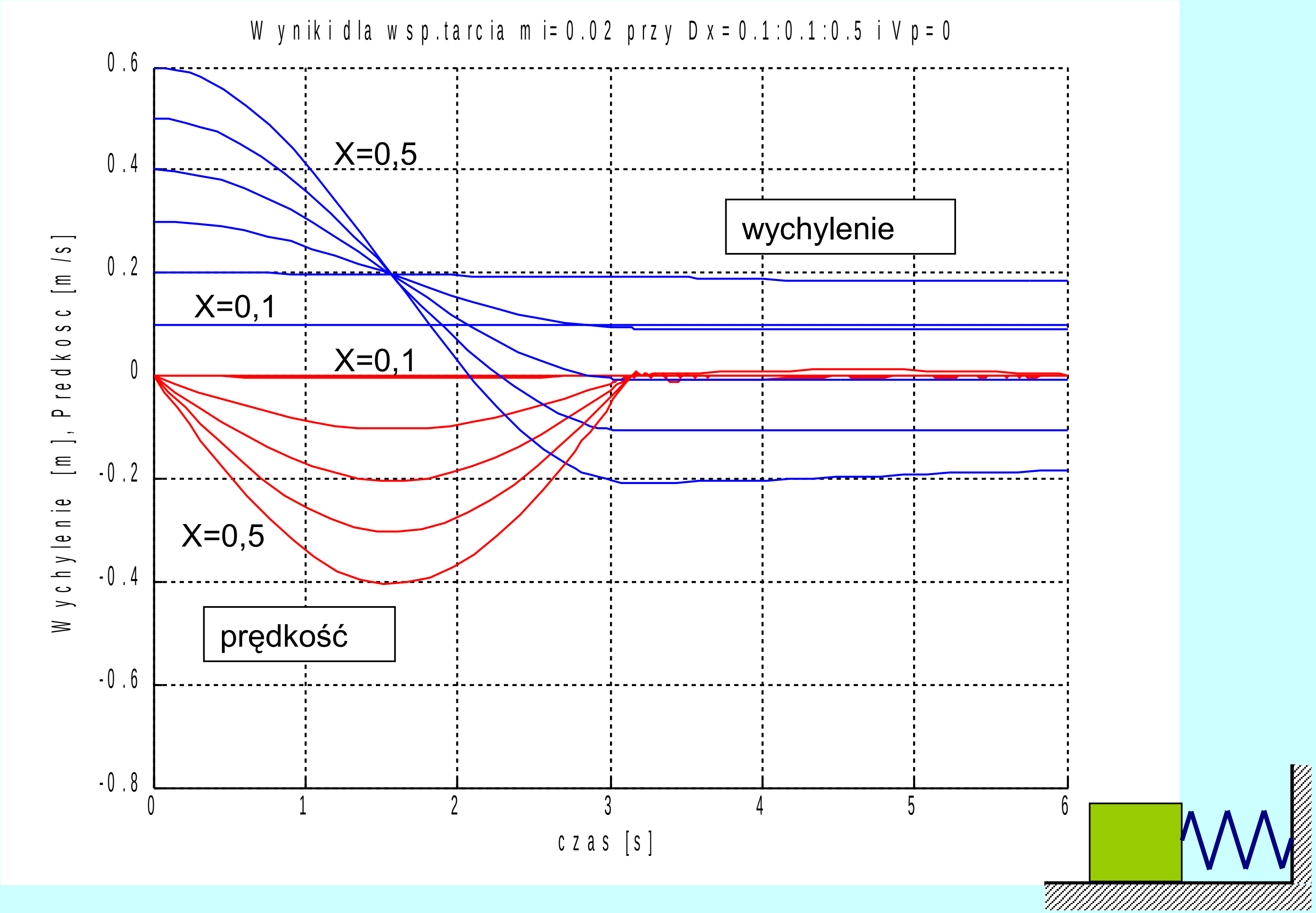
```
% funkcja modelująca suwak z tarciem suchym
function [Dx] = tar_such(t, x)
global c m k P mi
PZew=-c*x(1)+P;
TarGr=mi*9.81*m;
Dx(1)=x(2);
if x(2)==0        Dx(2)=(PZew-TarGr*proj(PZew/TarGr))/m;
else              Dx(2)=(PZew-TarGr*sign(x(2)))/m;
end
```

```
% funkcja projekcji
function [proj]=proj(z)
if abs(z)<1             proj=z;
else                    proj=sign(z);
end;
```

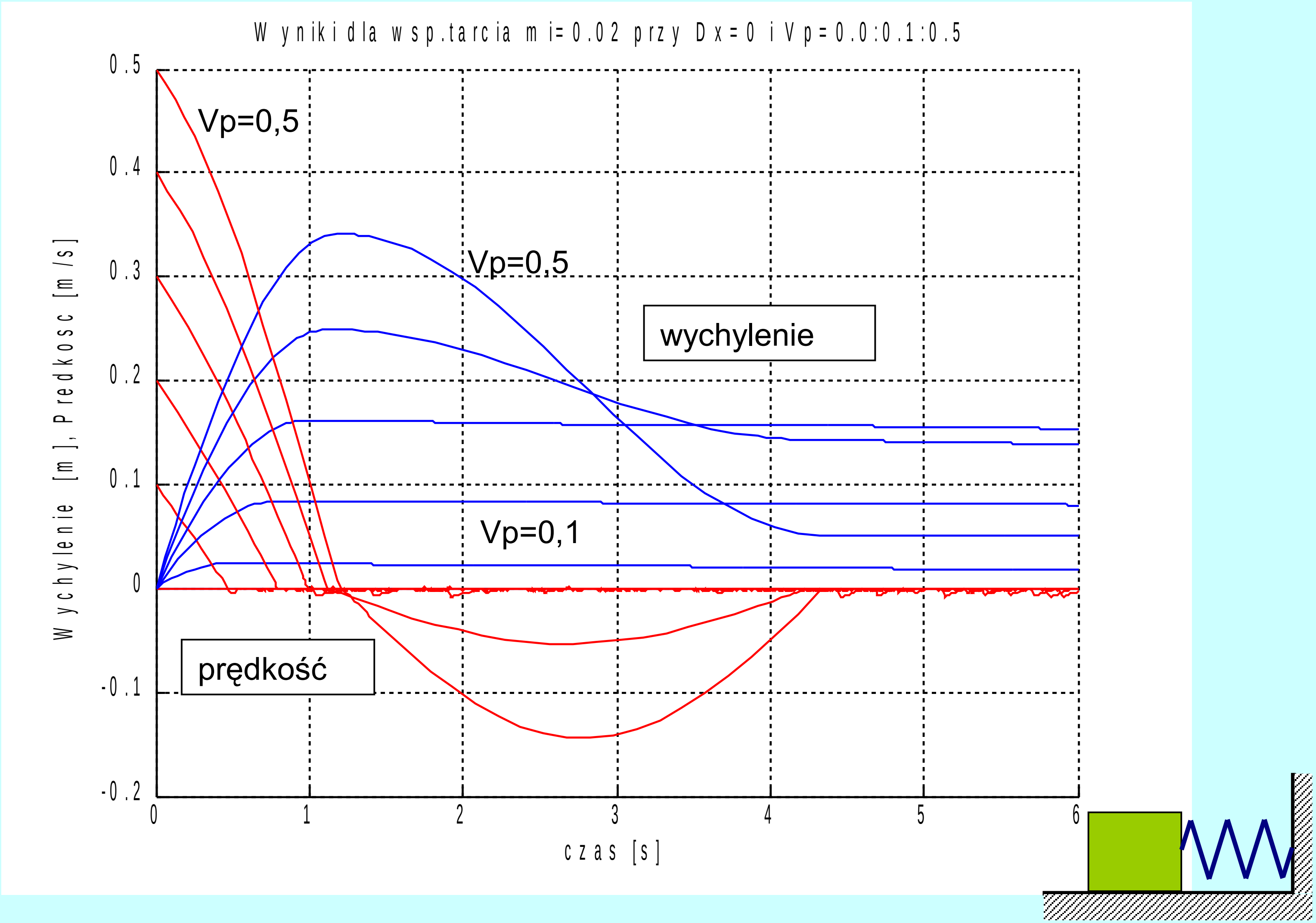
Modelowanie wybranych zjawisk



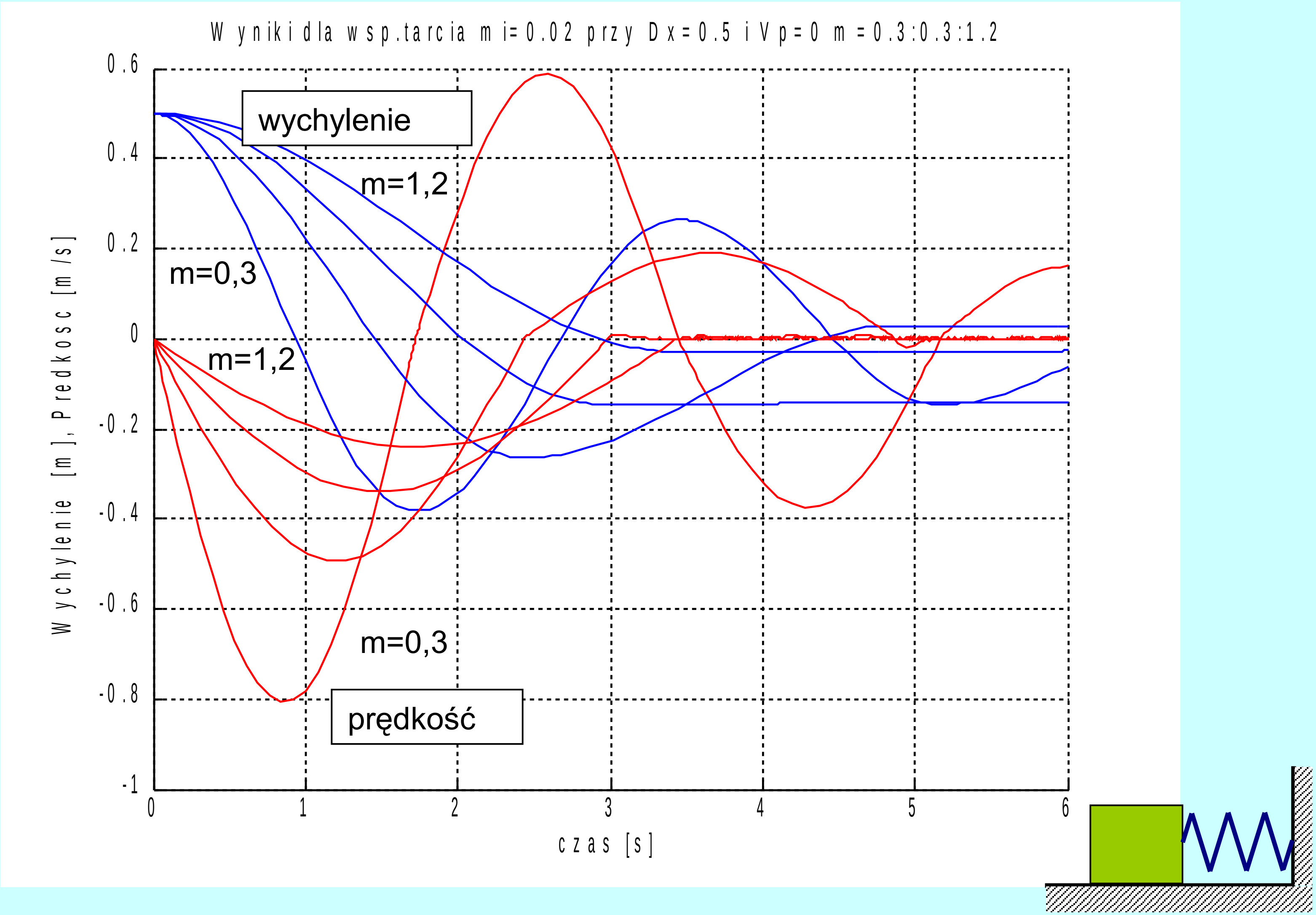
Modelowanie wybranych zjawisk



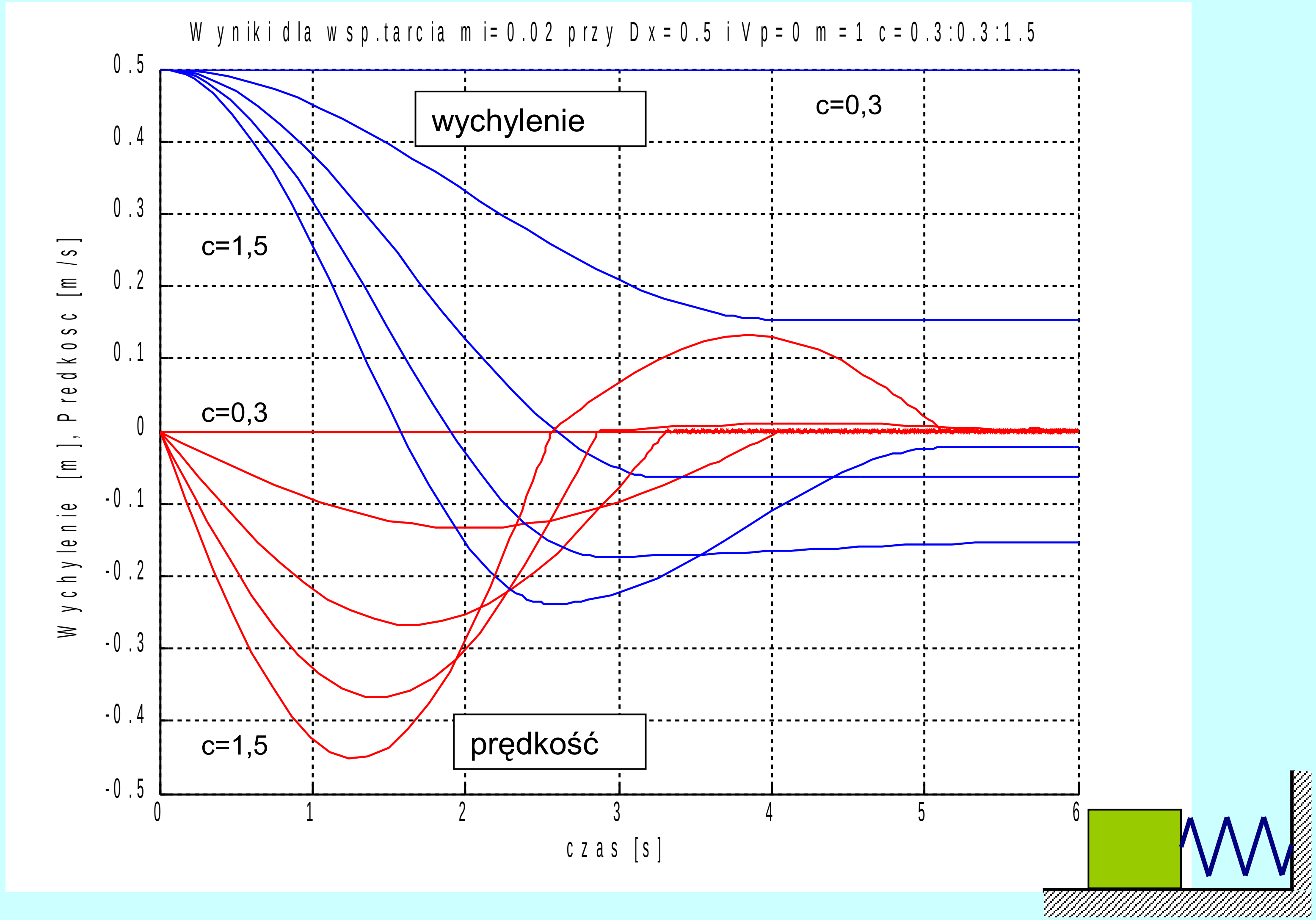
Modelowanie wybranych zjawisk



Modelowanie wybranych zjawisk



Modelowanie wybranych zjawisk



Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia lepkiego

- Tarcie to występuje w szczelinie miedzy powierzchniami wzajemnie przesuwających się ciał, jeżeli szczelina wypełniona jest smarem lub innym lepkim płynem (np. powietrzem).
- Siła tarcia lepkiego jest funkcją prędkości wzajemnego poślizgu *s* oraz zależy od pola powierzchni styku, natomiast można przyjąć, że nie zależy od siły docisku.
- Dla siły tej często przyjmuje się model:

$$T_{lep} = -k \cdot \left(\dot{x}\right)^{n} \cdot sign\left[\dot{x}\right]$$

gdzie: *k* i *n* są empirycznie wyznaczonymi wartościami stałymi dla konkretnego przypadku

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia lepkiego

- Jeżeli *n=1* to mówimy o *tarciu wiskotycznym*:

$$T_{lep} = -k \cdot \dot{x}$$

- Jeżeli płyn jest cieczą newtonowską, to wzór przyjmie postać:

$$T_{lep} = S \cdot \tau \cdot sign(\dot{x})$$

gdzie:

S – jest polem powierzchni zetknięcia;

τ - naprężeniem stycznym danym wzorem

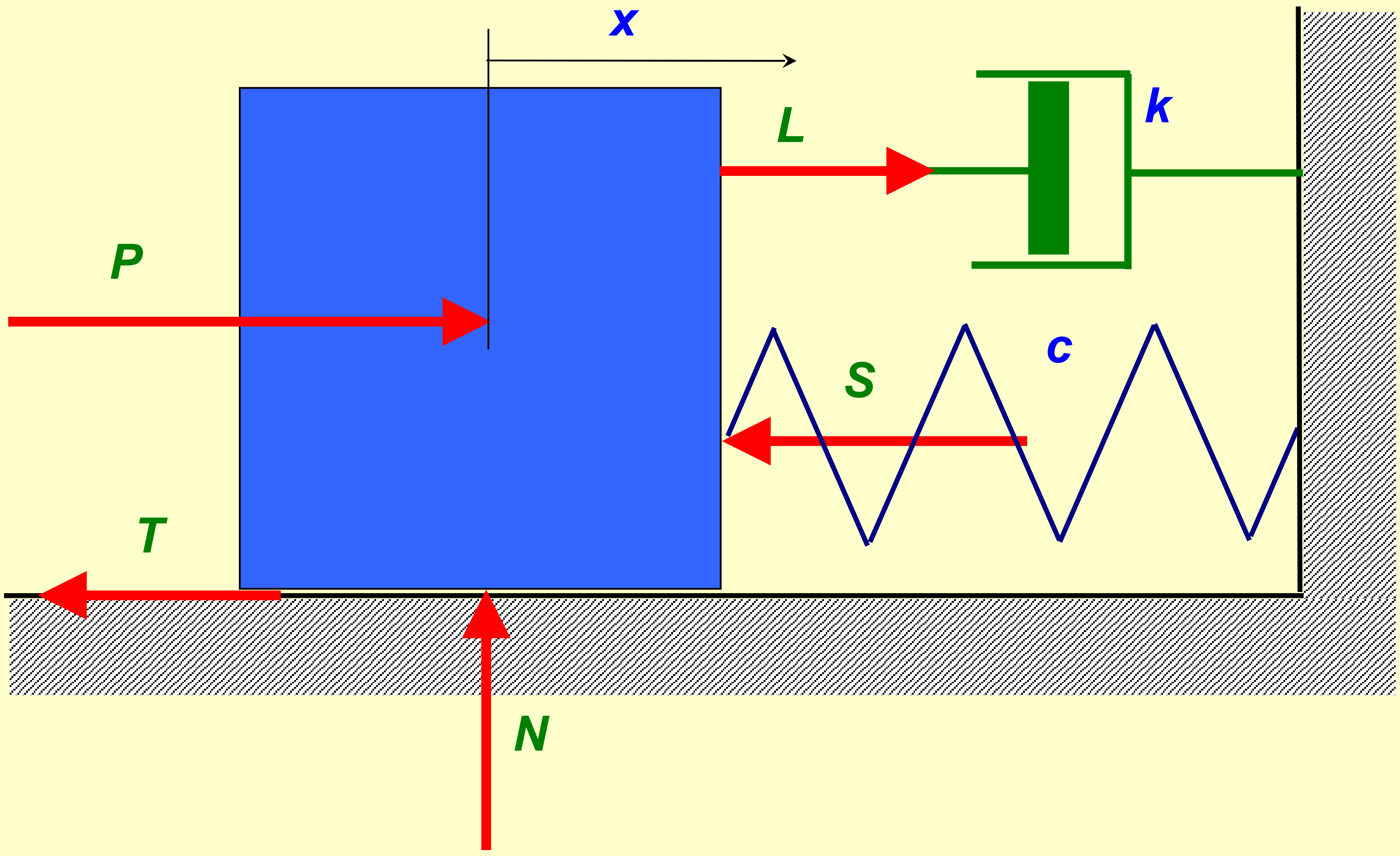
$$\tau = -\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial h}$$

gdzie: η - to współczynnik lepkości dynamicznej

$\frac{\partial v}{\partial h}$ - jest gradientem prędkości

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia lepkiego

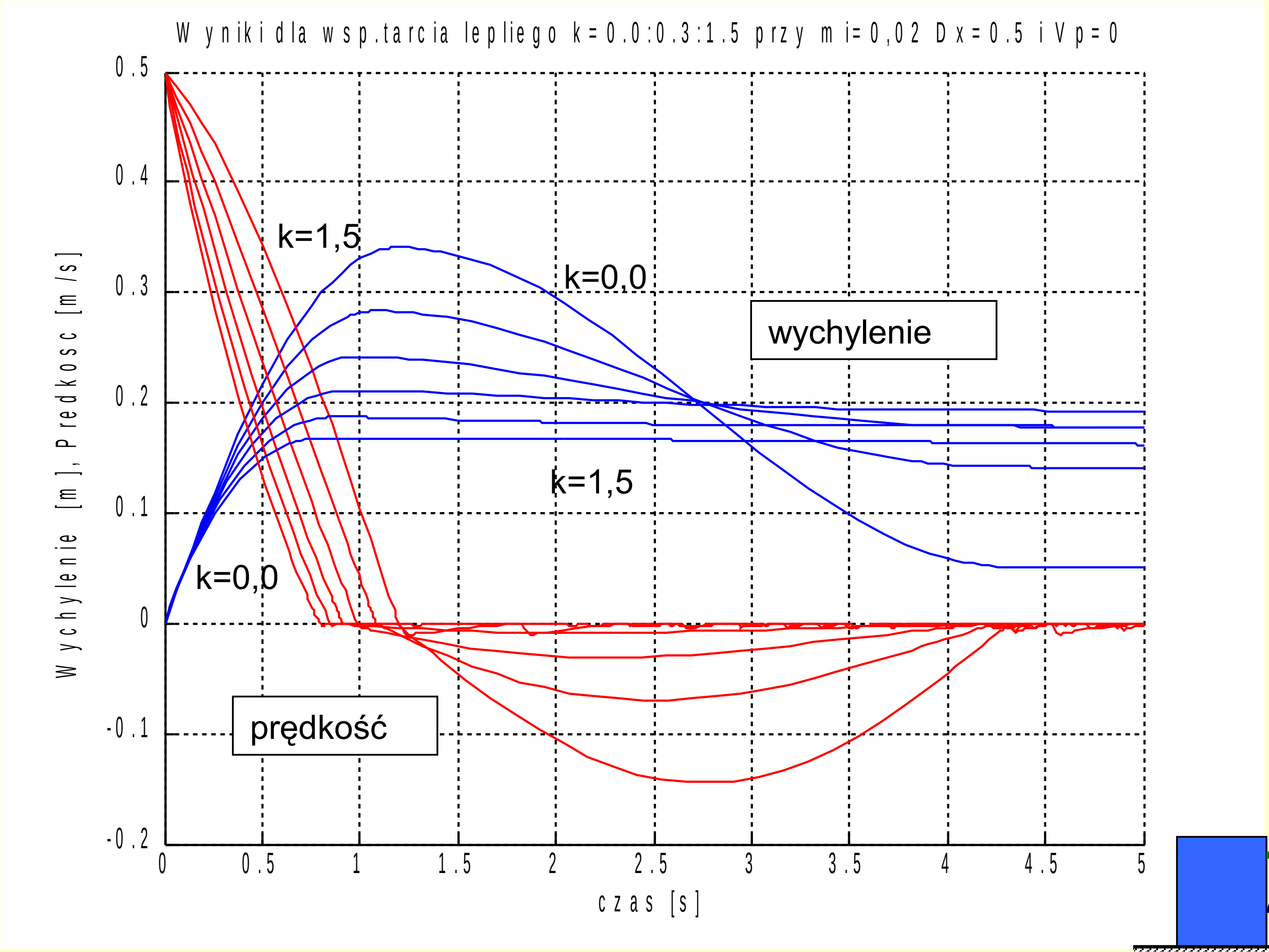


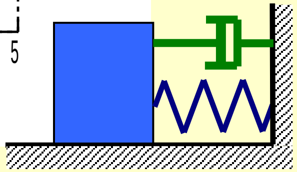
Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Modelowanie zjawiska tarcia lepkiego

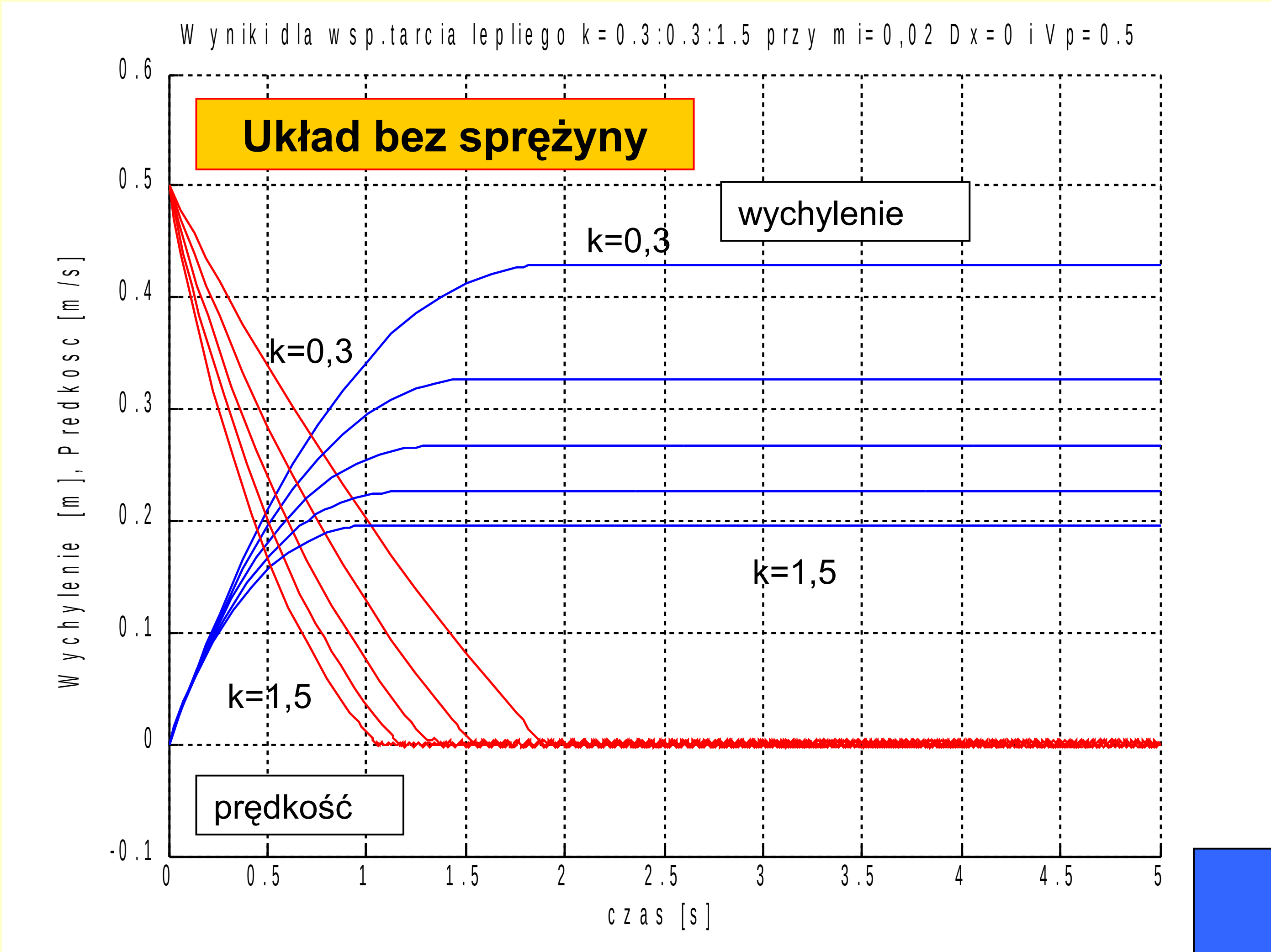
```
% funkcja modelująca suwak z tarciem lepkim
function [Dx] = tar_lep(t, x)
global c m k P mi
PZew=-c*x(1)+P-k*x(2);
TarGr=mi*9.81*m;
Dx(1)=x(2);
if x(2)==0          Dx(2)=(PZew-TarGr*proj(PZew/TarGr))/m;
else                Dx(2)=(PZew-TarGr*sign(x(2)))/m;
end
```

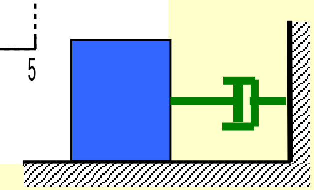
Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych



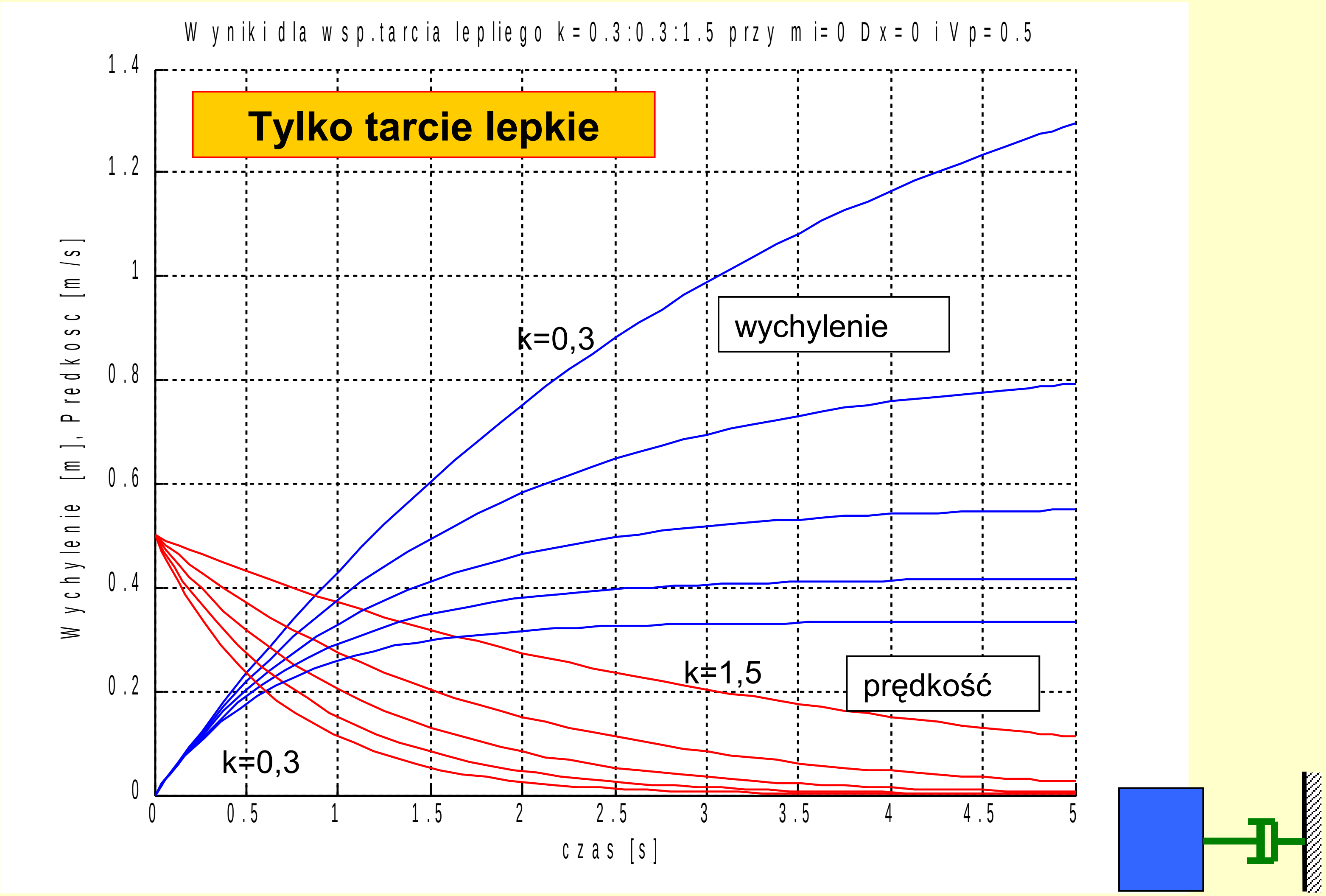


Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych



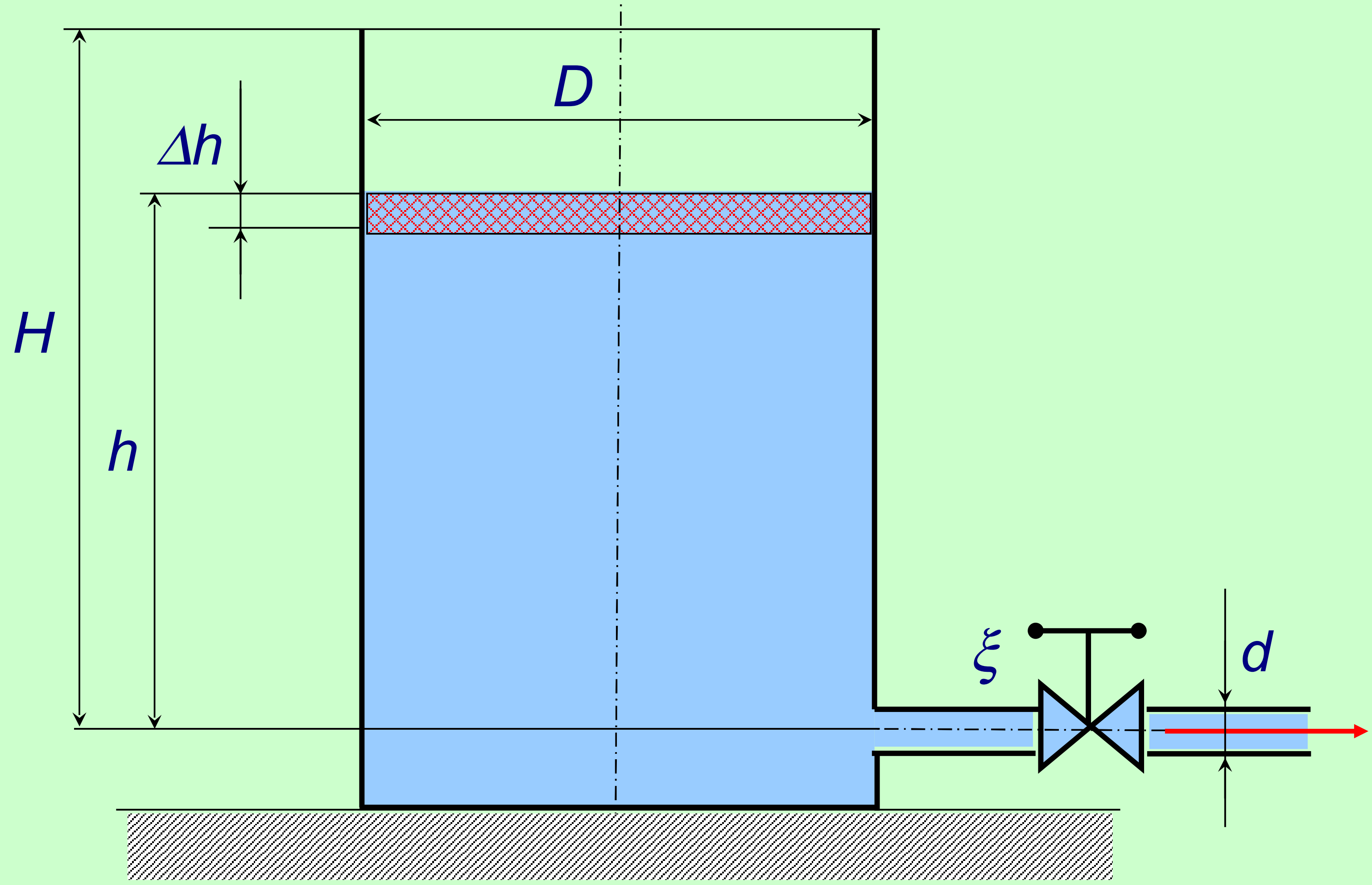


Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych



Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Wypływ cieczy ze zbiornika



Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Wypływ cieczy ze zbiornika

- Przyjmując pewne uproszczenia, układ ten w dowolnej chwili czasu *t* można opisać układem dwu równań:
  - zachowania ciągłości strugi

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \Delta h = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot V \cdot \Delta t$$

  - zachowania energii (równaniem Bernuoliego)

$$h = \frac{V^2}{2 \cdot g} + \xi \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

gdzie:

V - to prędkość wypływu cieczy ze zbiornika

ξ - to współczynnik miejscowych strat hydraulicznych.

$\Delta h \cong 0$

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Wypływ cieczy ze zbiornika

- Rozwiązanie tego układu stanowi równanie:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{1+\xi}}$$

a, przyjmując założenie, że $\Delta h \cong 0$, powyższy model dyskretny można zastąpić modelem ciągłym, opisanym równaniem różniczkowym:

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{1+\xi}}$$

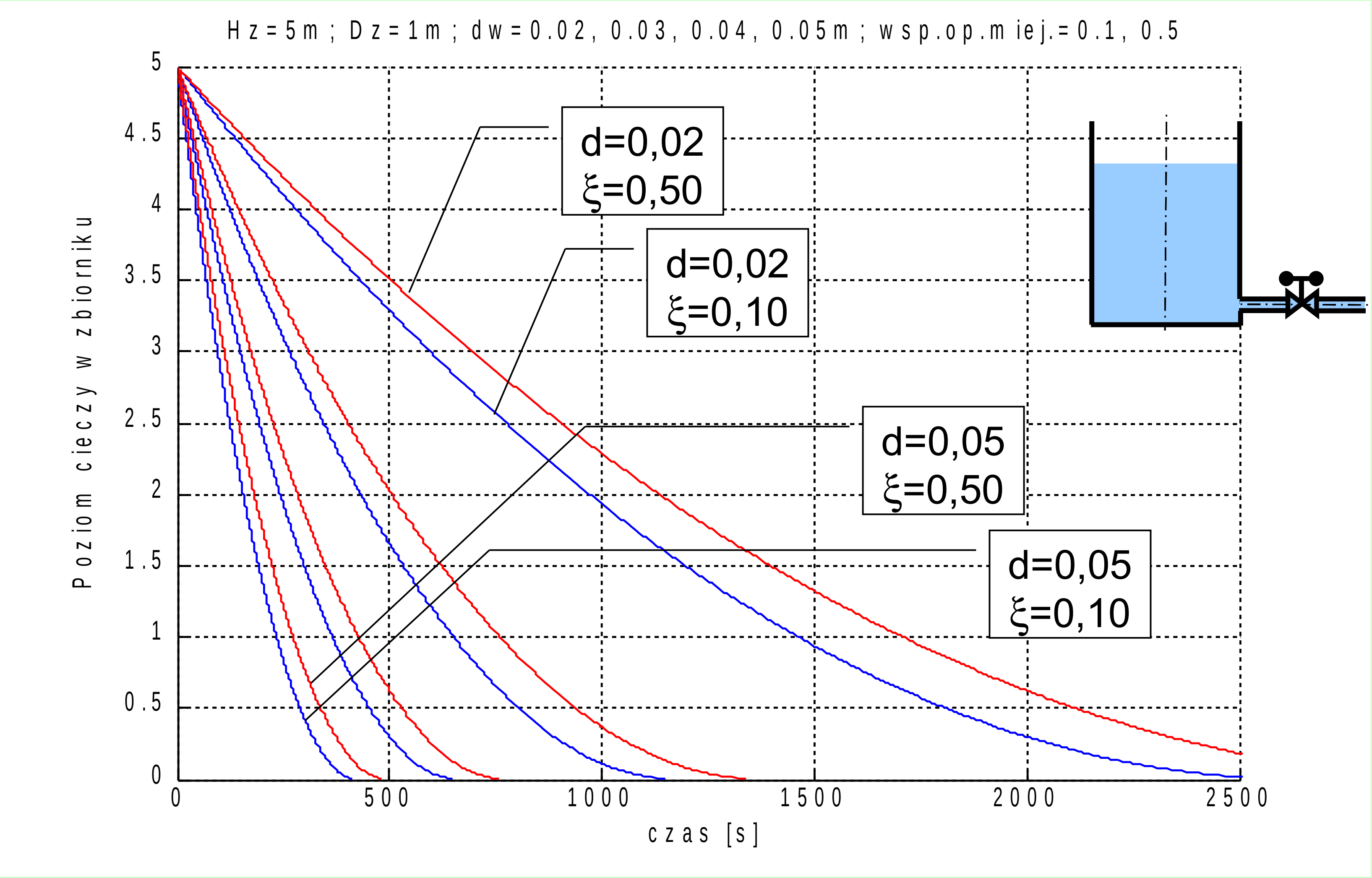
Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Wypływ cieczy ze zbiornika

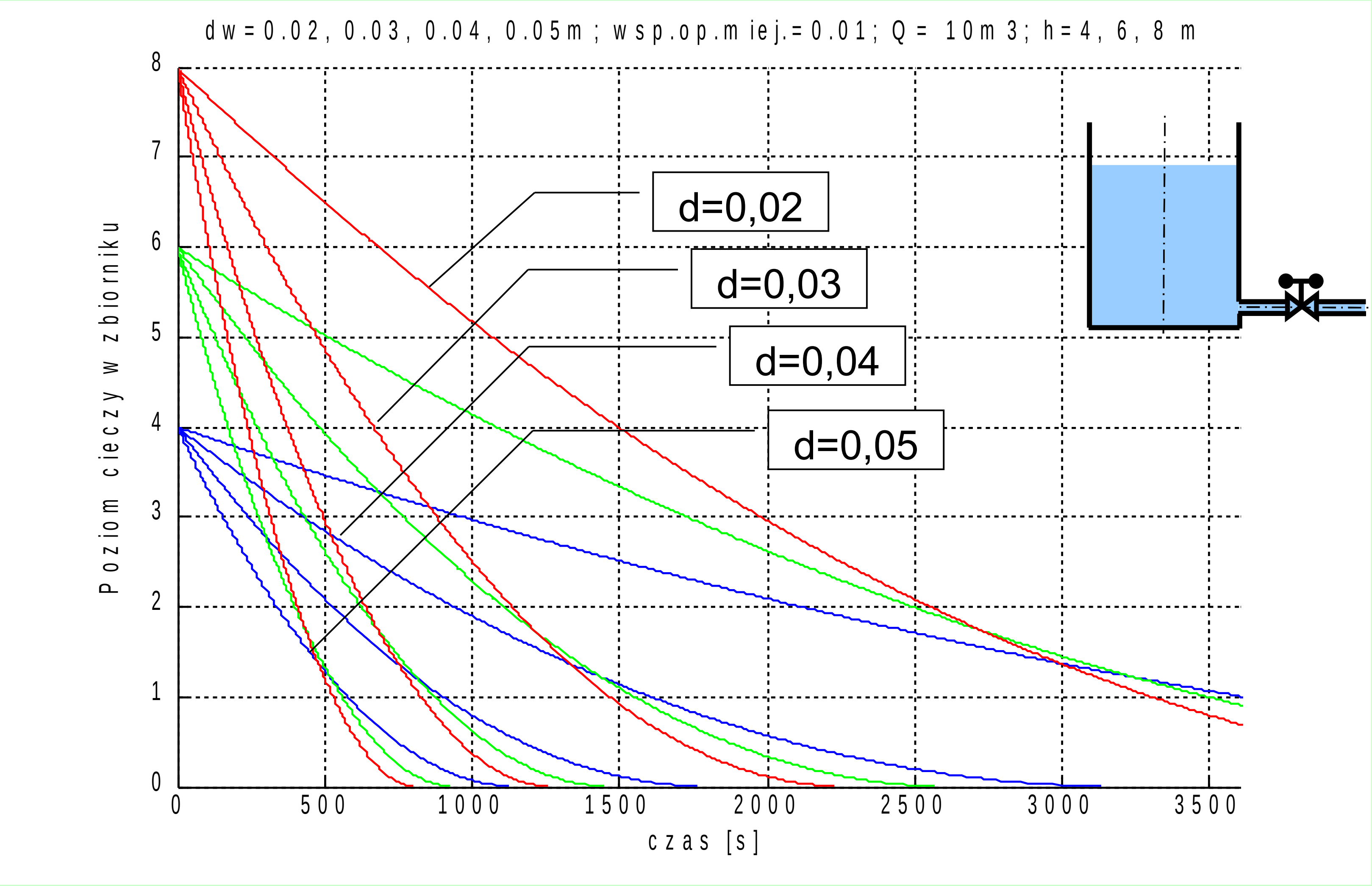
```
% Symulacja swobodnego wypływu
% cieczy ze zbiornika
% Modelowanie dyskretne
close all
D =input('Średnica zbiornika        ? ');
dw=input('Średnica otworu          ? ');
H =input('Wysokość napełnienia ? ');
z =input('Wsp. strat hydraul.       ? ');
dh=0.005; % gradient wysokości
hi(1)=H;  t(1)=0;    i=0;
while hi(i) > 0
    i=i+1;
    hi(i)=H-i*dh;
    v(i)=sqrt((2*9.81*hi(i))/(1+z));
    dt=((D/dw)^2)*(dh/v(i));
```

```
   if i==1
            t(i)=dt;
   else
             t(i)=t(i-1)+dt;
   end
end
plot(t,hb,'b');
grid on;
axis([0 2500 0 h])
xlabel('czas [s]')
ylabel('Poziom cieczy w zbiorniku')
```

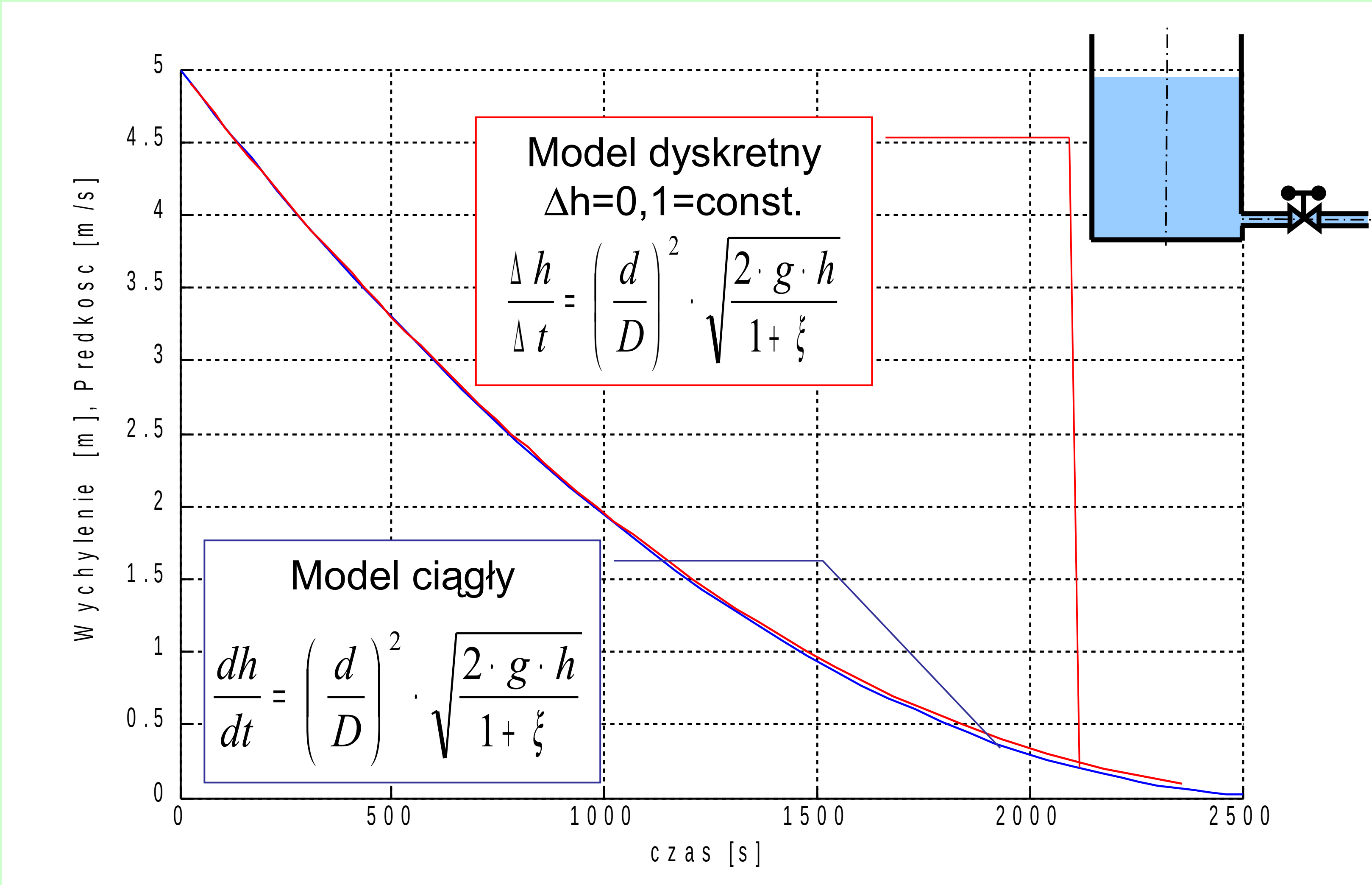
Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych



Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych



Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych



Rozwiązywanie zagadnienia początkowego

<u>MATLAB</u>

MATLAB zawiera funkcje rozwiązujące zagadnienie początkowe dla równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą :

- pary metod 2 i 3 - *funkcja ode23*

  [*T,X*]=ode23(*'F(t,x)', t0, tk, x0, tol, tr***)**

- pary metod 4 i 5 - *funkcja ode45*

  [*T,X*]=ode45(*'F(t,x)', t0, tk, x0, tol, tr* **)**

Rozwiązywanie zagadnienia początkowego

MATLAB

gdzie:

F(t,x)	*łańcuch zawierający nazwę zapisanej w skrypcie funkcji*
t0, tk	*granice przedziału czasu poszukiwania rozwiązania*
x0	*wektor kolumnowy rozwiązania początkowego*
tol	*parametr opcjonalny określający dokładność (10^{-3})*
tr	*parametr opcjonalny (tr<>0) powoduje wypisanie na ekranie kolejnych kroków realizacji obliczeń*

Rozwiązywanie zagadnienia początkowego

Przykład: oscylator liniowy z tłumieniem

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x - a \cdot \frac{dx}{dt}$$

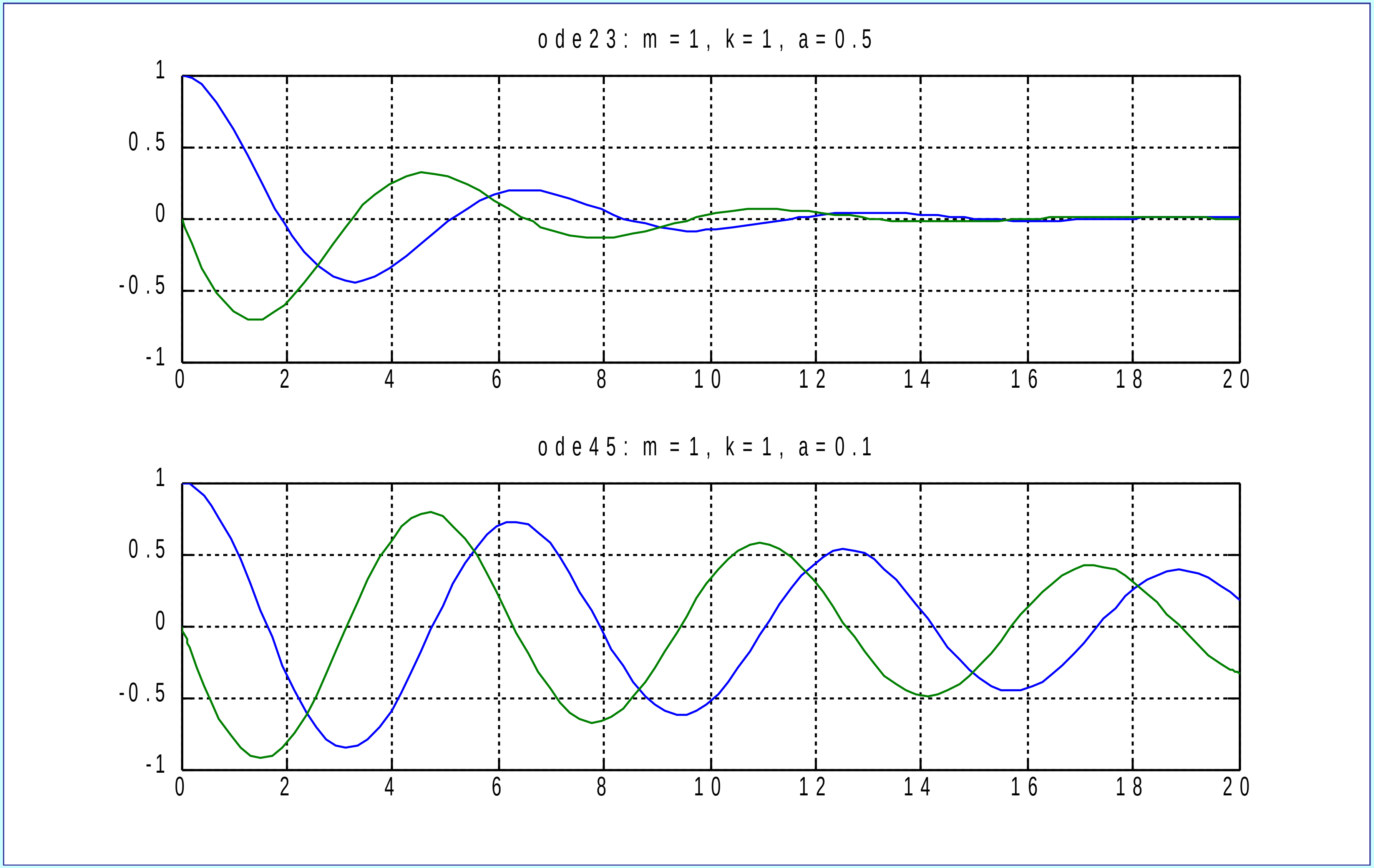
$$x_1 = x; \quad x_2 = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ (-k \cdot x_1 - a \cdot x_2) \cdot \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

```
M=1; A=0.5; K=1;global M A K
[T,X]=ode23('osc',0,20,[1 0]');
subplot(2,1,1); plot(T,X(:,1),T,X(:,2));
grid on;  title('ode23: m=1, k=1, a=0.5');
A=0.1; [T,X]=ode45('osc',0,20,[1 0]');
subplot(2,1,2); plot(T,X(:,1),T,X(:,2));
grid on;  title('ode45: m=1, k=1, a=0.1');
```

```
function [Dx]=osc(t,x)
global M A K
Dx=[x(2);(-K*x(1)-A*x(2))/M];
```

Rozwiązywanie zagadnienia początkowego



Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Równanie Duffinga

- Przy rozwiązywaniu układu równań wyższego rzędu konieczne jest sprowadzenie równania do postaci zwyczajnej.
  - równanie $$\frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \frac{dx}{dt} - \left(x - x^3\right) = a \cdot \sin(t)$$
  - wprowadzenie zmiennych

$$x_1 = x \quad ; \qquad x_2 = \frac{dx_1}{dt}$$

  - zapis końcowy

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -k \cdot x_2 + b \cdot \left(x_1 - x^3\right) + a \cdot \sin(t) \end{bmatrix}$$

Modelowanie wybranych zjawisk fizycznych

Równanie Duffinga - rozwiązanie